Лабораторна робота № 1. Елементи теорії похибок. Розв'язування нелінійних рівнянь методом бісекції

1. Абсолютна та відносна похибка

Похибка – це величина, яка характеризує точність результату.

Нехай х –точне значення деякої величини, а х* - її відоме наближення.

Абсолютною похибкою наближеного значення х* називають величину Δ х*, для якої

$$|x^* - x| \le \Delta x^* .$$

Відносною похибкою наближеного значення х* називають величину δx^*, для якої

$$\left|\frac{x^* - x}{x^*}\right| = \left|\frac{\Delta x^*}{x^*}\right| \le \delta x^* .$$

Точність результату краще характеризує відносна похибка, як правило її виражають у відсотках.

Інформацію про абсолютну та відносну похибку можна використати для наступного представлення числа x

$$x = x^* \pm \Delta x^*,$$

$$x = x^*(1 \pm \delta x^*).$$

2. Значимі та вірні цифри

Значимими цифрами числа називаються всі цифри в його записі, починаючи з першої ненульової зліва.

Приклад 1. Х=7,45043 (всі цифри - значимі), Х=0,00814 (8,1,4 – значимі цифри), Х=84500 (всі цифри - значимі), Х=5,0710 (всі цифри - значимі).

Приклад 2. Заокруглюючи число 2,314 до трьох значимих цифр, визначити абсолютну та відносну похибки отриманого наближеного числа

$$x^* = 2{,}31; \quad \Delta x^* = |x - x^*| = |2{,}314 - 2{,}31| = 0{,}004; \quad \delta x^* = \left|\frac{\Delta x^*}{x^*}\right| = \left|\frac{4\cdot 10^{-3}}{2{,}31}\right| = 1{,}7\cdot 10^{-3}.$$

Приклад 3. Заокруглюючи число 0,3513 до двох значимих цифр, визначити абсолютну та відносну похибки отриманого наближеного числа

$$x^* = 0{,}35; \quad \Delta x^* = |x - x^*| = |0{,}3513 - 0{,}35| = 0{,}0013; \quad \delta x^* = \left|\frac{\Delta x^*}{x^*}\right| = \left|\frac{1{,}3\cdot 10^{-3}}{0{,}35}\right| = 3{,}7\cdot 10^{-3}.$$

Значима цифра наближеного числа газивається **вірною**, якщо його абсолютна похибка не перевищує половини одиниці десяткового розряду, що відповідає цій цифрі.

Приклад 4. Нехай $x^* = 17{,}68714; \quad \Delta x^* = 3 \cdot 10^{-4}$. Скільки вірних значимих цифр має число x^*?

Для значимої цифри 7 половина одиниці десяткового розряду - $0{,}5 \cdot 10^{-3}$. Оскільки виконується нерівність

$$\Delta x^* = 0{,}3 \cdot 10^{-3} < 0{,}5 \cdot 10^{-3},$$

то число x^* має 5 вірних цифр (1, 7, 6, 8, 7). Цифри 1 та 4 є сумнівними.

Приклад 5. Нехай $x^* = 12{,}843; \quad \Delta x^* = 0{,}03$. Скільки вірних значимих цифр має число x^*?

Оскільки

$$\Delta x^* = 0{,}3 \cdot 10^{-1} < 0{,}5 \cdot 10^{-1},$$

то число x^* має 3 вірні цифр (1, 2, 8). Цифри 4 та 3 є сумнівними.

Приклад 6. Нехай $x^* = 0{,}07931; \quad \Delta x^* = 0{,}006$. Скільки вірних значимих цифр має число x^*?

Значимі цифри числа – 7, 9, 3 та 1. Цифра 7 не є вірною, бо

$$\Delta x^* = 0{,}6 \cdot 10^{-2} > 0{,}5 \cdot 10^{-2},$$

таким чином в представленні числа вірні цифри відсутні.

3. Методи розв'язання нелінійних рівнянь

Постановка задачі: Знайти всі або деякі корені рівняння

$$f(x) = 0, \qquad (1)$$

де $f(x)$ – неперервна функція.

Розв'язання задачі (1) містить два етапи:

1) відокремлення коренів – знаходження достатньо малих інтервалів, на кожному з яких є лише один корінь;

2) уточнення наближеного значення кореня до наперед заданої точності.

Відокремлення коренів рівняння (1) грунтується на теоремі:

Теорема Больцано-Коші. Якщо неперервна функція $f(x)$ на кінцях інтервалу $[a,b]$ має різні за знаком значення, тобто $f(a)f(b)<0$, то на цьому інтервалі рівняння (1) має хоча б один корінь. Якщо, крім цього, існує похідна $f'(x)$, яка зберігає знак, тобто $f'(x)>0$ або $f'(x)<0 \quad \forall x \in [a,b]$, то корінь рівняння (1) на інтервалі $[a,b]$ - єдиний.

Способи відокремлення коренів:

1) метод підбору інтервалу і комп'ютерне табулювання

2) графічний спосіб (побудова графіка функції, який дає змогу вибрати інтервал).

Обчислювальні можливості OpenOffice дозволяють будувати таблиці та графіки для будь-яких функцій. Протабулюємо та побудуємо графік для функції $f(x)=x-\cos(x)$ та знайдемо відрізки, на яких побудований графік перетинає вісь Ох. Припустимо, що хоча би один із коренів рівняння лежить на відрізку $[-10;10]$. Якщо на цьому відрізку корені відсутні, будемо вибирати інший відрізок (наприклад, $[10;20]$) поки не знайдемо такий відрізок, на якому є хоча б один корінь рівняння. Побудуємо таблицю значень функції з кроком $0{,}1$.

Запускаємо програму OpenOffice . На вільному робочому листі заповнюємо заголовок таблиці, в якій будемо виконувати обчислення.

	A	B	C
1	x	f(x)	
2	-10	=A2-cos(A2)	
3	-9,9		
4			
5			

Рис. 1.1

В комірку **A2** вводимо число –10, а в **A2** число –9,9. Виділяємо діапазон **A1:A2**, наводимо вказівник миші на правий нижній кут рамки навколо цього діапазону, і протягуємо його до комірки **A202**, тримаючи натиснутою ліву кнопку миші. В комірку **B2** вводимо формулу "=A2-Cos(A2)", та аналогічним способом (використовуючи автозаповнення) копіюємо цю формулу на діапазон **B2: B202**.

На основі отриманої таблиці будуємо лінійну діаграму. Виділяємо у діапазон **B1:B202** та виконуємо команду **Insert⇒Chart (Вставка⇒Діаграма)**, вибираємо тип – **XY(Scatter)** ⇒ **Finish.**

З отриманого графіка бачимо, що на відрізку $[0;\ 1{,}5]$ рівняння має єдиний корінь. Про це також можна переконатися з таблиці значень (рис. 1.1).

Отже, шуканий корінь рівняння $f(x)=0$ знаходитися на відрізку $[0;\ 1{,}5]$.

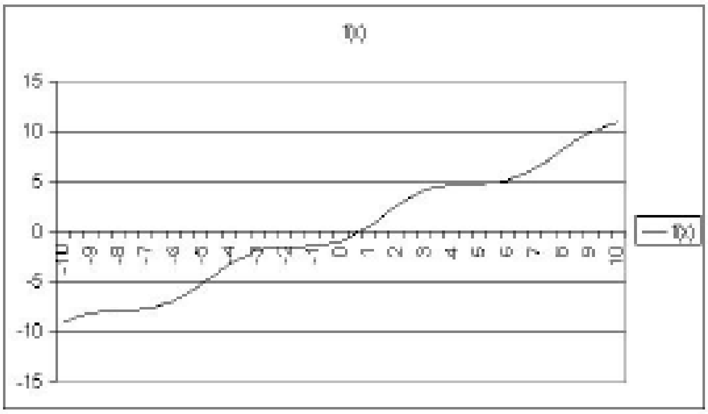

Рис. 1.2

Розглянемо метод уточнення наближеного значення кореня. Будем вважати, що для рівнняння (1) відокремлено відрізок $[a,b]$, на якому функція $f(x)$ має єдиний корінь, причому $f(a)f(b)<0$.

4. Метод бісекції (поділу навпіл або дихотомії)

Метод бісекції дозволяє уточнити корінь з наперед заданою точністю.

Суть цього методу полягає в тому, що відрізок, який містить корінь, послідовно звужують поділом пополам до тих пір, поки не буде досягнута необхідна точність визначення кореня.

Знаходимо середину інтервалу $[a,b]$: $c=\dfrac{a+b}{2}$.

Якщо $f(c)=0$, то шуканий корінь $\bar{x}$ співпадає з серединою відрізка $[a,b]$, тобто $\bar{x}=c$. Інакше він міститься або на інтервалі $[a,c]$ за умови $f(a)f(c)<0$, або на інтервалі $[c,b]$ в протилежному випадку (див. рис. 1.3).

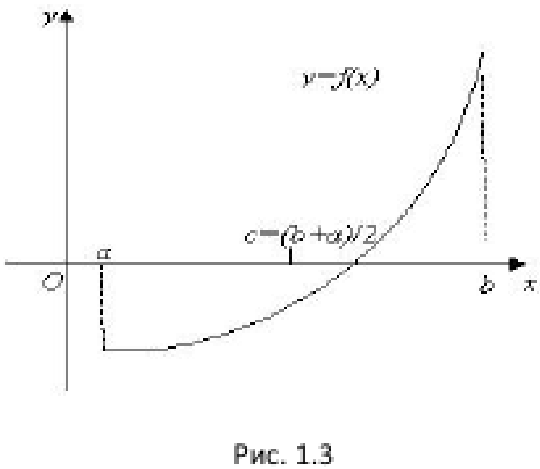

Рис. 1.3

Вважатимемо, що шуканий корінь $\bar{x}$ знайдено (уточнено) з точністю ε, якщо довжина проміжку, на якому він міститься, не перевищує цієї точності.

Іншим критерієм досягнення точності ε є умова того, що $|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon$, де x_i – уточнене значення розв'язку на кроці i.

Якщо заданої точності не досягнуто, то провівши перепозначення c через a (у випадку $f(x)f(a) > 0$) або через b (у випадку $f(a)f(x) < 0$) – знову шукаємо середину інтервалу і повторюємо обчислення поки необхідна точність не буде досягнута.

5. Реалізація методу бісекції за допомогою калькулятора

Розглянемо рівняння $x - \cos(x) = 0$, для якого ми відокремили графічним способом відрізок $[0;1{,}5]$ з коренем.

1. Пересвідчуємося в тому, що

$f(0) = 0 - \cos(0) = 0 - 1 = -1<0,$

$f(1{,}5) = 1{,}5 - \cos(1{,}5) \approx 1{,}5 - 0{,}07074 = 1{,}42926 >0,$

отже, $f(0) \cdot f(1{,}5) = -1{,}42926 < 0$, і на обраному нами відрізку $[0;1{,}5]$ справді міститься корінь рівняння $x - \cos(x) = 0$.

2. Знаходимо середину відрізка $[0;1{,}5]$ та відповідне значення функції:

$$c = \frac{1{,}5 - 0}{2} = 0{,}75\ , \quad f(0{,}75) = 0{,}75 - \cos(0{,}75) \approx 0{,}75 - 0{,}73169 = 0{,}01831\ ,$$

отже, $f(0) \cdot f(0{,}75) = -0{,}01831 < 0$, тому за наступне уточнення відрізка, на якому шукаємо розв'язок рівняння беремо відрізок $[0;\ 0{,}75]$.

3. Знаходимо середину відрізка $[0;\ 0{,}75]$ та відповідне значення функції:

$$c = \frac{0{,}75 - 0}{2} = 0{,}375\ , \quad f(0{,}375) = 0{,}375 - \cos(0{,}375) \approx 0{,}375 - 0{,}93051 = -0{,}55551\text{, отже,}$$

$f(0{,}375) \cdot f(0{,}75) = -0{,}0101713881 < 0$, тому за наступне уточнення відрізка, на якому шукаємо розв'язок рівняння беремо відрізок $[0{,}375;0{,}75]$.

Як бачимо, після трьох кроків методу бісекції відрізок, що містить корінь зменшився до довжини $l = 0{,}75 - 0{,}375$. Продовжуючи обчислення, можна знайти відрізок як завгодно малої довжини, що містить корінь. Обчислення припиняємо, якщо довжина відрізка стає меншою ніж задана точність обчислення. Таким чином, можна стверджувати, що після трьох кроків методу бісекції корінь рівняння знайдено з точністю $0{,}375$.

6. Реалізація методу бісекції засобами OpenOffice

Розглянемо реалізацію методом бісекції наведеного вище рівняння $x - \cos(x) = 0$ засобами **OpenOffice**.

1. Запускаємо програму **OpenOffice**, переходимо на вільний робочий лист.

Заповнюємо заголовок таблиці, в якій будемо виконувати обчислення

	A	B	C	D	E	F	G
1	Номер ітерації	a	b	f(a)	f(b)	f((b-a)/2)	|a-b|
2							
3							
4							

Рис.1.4

2. Заповнюємо комірки з початковими наближеннями та формулами для обчислень:

Комірка	Формула (значення)
B2	0 (ліва межа проміжку)
C2	1,5 (права межа проміжку)
D2	=B2-COS(B2)
E2	=C2-COS(C2)
F2	=(B2+C2)/2-COS((B2+C2)/2)
G2	=ABS(B2-C2)

3. В комірки **B3** та **C3** вводимо формули для реалізації методу:

B3: =IF(F2*D2<0;B2;(B2+C2)/2)

або =ЕСЛИ(F2*D2<0;B2;(B2+C2)/2)

C3: =IF(F2*E2<0;C2;(B2+C2)/2)

або =ЕСЛИ(F2*E2<0;C2;(B2+C2)/2)

Для комірок діапазону **D3:G3** достатньо скопіювати формули із відповідних комірок діапазону **D2:G2**.

4. Використовуючи автозаповнення проводимо обчислення. Для цього виділяємо діапазон **B3:G3**, наводимо курсор миші на правий нижній кут діапазону, поки курсор не набуде вигляду **"+"** чорного кольору. Тримаючи натиснутою ліву кнопку миші переміщуємо курсор, доки в останній заповненій комірці стовпця **G** не отримаємо значення, менше за вказану похибку ε .

	A	B	C	D	E
1	Номер ітерації	*a*	*b*	*f(a)*	*f(b)*
2	1	0	1,5	=B2-COS(B2)	
3	2	=IF(F2*D2<0;B2;(B2+C2)/2)	=IF(F2*E2<0;C2;(B2+C2)/2)	=B3-COS(B3)	
4	3	=IF(F3*D3<0;B3;(B3+C3)/2)	=IF(F3*E3<0;C3;(B3+C3)/2)	=B4-COS(B4)	
6	4	=IF(F4*D4<0;B4;(B4+C4)/2)	=IF(F4*E4<0;C4;(B4+C4)/2)	=B5-COS(B5)	

D	E	F	G	H
f(a)	*f(b)*	*f((b-a)/2)*	*|a-b|*	
	=C2-COS(C2)	=(B2+C2)/2-COS((B2+C2)/2)	=ABS(B2-C2)	
	=C3-COS(C3)	=(B3+C3)/2-COS((B3+C3)/2)	=ABS(B3-C3)	
	=C4-COS(C4)	=(B4+C4)/2-COS((B4+C4)/2)	=ABS(B4-C4)	
	=C5-COS(C5)	=(B5+C5)/2-COS((B5+C5)/2)	=ABS(B5-C5)	

Рис. 1.5

У нашому випадку точність $0{,}000092$ досягається на 15 кроці (див.Рис.1.6)

5. В якості наближеного розв'язку рівняння можна прийняти середину відрізка, значення кінців якого записані в останніх заповнених комірках стовпців **B** та **C**: $\bar{x} = (0{,}7390136719 + 0{,}7391052246)/2$.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Номер ітерації	*a*	*b*	*f(a)*	*f(b)*	*f((b-a)/2)*	*|a-b|*	
2	1	0,00000	1,50000	-1,00000	1,42926	0,01831	1,50000	
3	2	0,00000	0,75000	-1,00000	0,01831	-0,56551	0,75000	
4	3	0,37500	0,75000	-0,56551	0,01831	-0,28342	0,37500	
5	1	0,56250	0,75000	-0,28342	0,01831	-0,13604	0,18750	
6	5	0,65625	0,75000	-0,13604	0,01831	-0,05970	0,09375	
7	6	0,70313	0,75000	-0,05970	0,01831	-0,02090	0,04688	
8	7	0,72656	0,75000	-0,02090	0,01831	-0,00135	0,02344	
9	8	0,73828	0,75000	-0,00135	0,01831	0,00847	0,01172	
10	9	0,73828	0,74414	-0,00135	0,00847	0,00356	0,00586	
11	10	0,73828	0,74121	-0,00135	0,00356	0,00111	0,00293	
12	11	0,73828	0,73975	-0,00135	0,00111	-0,00012	0,00146	
13	12	0,73901	0,73975	-0,00012	0,00111	0,00049	0,00073	
14	13	0,73901	0,73938	-0,00012	0,00049	0,00019	0,00037	
15	14	0,73901	0,73920	-0,00012	0,00019	0,00003	0,00018	
16	15	0,73901	0,73911	-0,00012	0,00003	-0,00004	0,00009	
17								
18								
19								
20		Розв'язок	0,73906					

Рис. 1.6

6. Записуємо розв'язок в довільну клітинку під побудованою таблицею (див. Рис. 1.7)

18			
19			
20	Розв'язок	=(B16+C16)/2	
21			

Рис. 1.7

7. Індивідуальні завдання

Завдання 1. Заокруглюючи наступні числа до трьох значущих цифр, визначити абсолютну та відносну похибки наближених чисел.

1) 3,2523	**2) 1,643**	**3) 1,807**
4) 0,17153	**5) −372,75**	**6) 11,45**
7) 0,02103	**8) 3,4578**	**9) 67,78**
10) 1,445	**11) 75,1425**	**12) 90,123**
13) −0,0035392	**14) −583,7467**	**15) 7,789**
16) −583,71	**17) −83,71**	**18) −3,7167**
19) 0,004966	**20) 8,8059**	**21) 0,1537**
22) 315,55	**23) 0,001234**	**24) 5,785**
25) 71,534	**26) 0,1020**	**27) 57,948**
28) 0,1545	**29) 5,07890**	**30) 12,4789**

Завдання 2. Визначити кількість вірних цифр в числі x, якщо задана його відносна похибка.

1) x = **2,7981** $\delta(x)$= **0,1·10^{-2};**	**16)** x = **32,8** $\delta(x)$= **2%;**
2) x = **12,8370** $\delta(x)$= **1%;**	**17)** x = **23,652** $\delta(x)$= **0,1;**
3) x = **0,3328** $\delta(x)$= **0,2·10^{-1};**	**18)** x = **1761** $\delta(x)$= **1%;**
4) x = **372,8** $\delta(x)$= **2%;**	**19)** x = **0,03575** $\delta(x)$=**0,5·10^{-2};**
5) x = **23,652** $\delta(x)$= **0,1;**	**20)** x = **0,2453** $\delta(x)$= **10%;**
6) x = **17261** $\delta(x)$= **1%;**	**21)** x = **0,00035** $\delta(x)$= **0,15;**
7) x = **0,03575** $\delta(x)$= **0,5·10^{-2};**	**22)** x = **32,8** $\delta(x)$= **2%;**
8) x = **0,22453** $\delta(x)$= **10%;**	**23)** x = **23,982** $\delta(x)$= **0,1;**
9) x = **0,000335** $\delta(x)$= **0,15;**	**24)** x = **161** $\delta(x)$= **1%;**
10) x = **6,3495** $\delta(x)$= **0,1%;**	**25)** x = **0,0375** $\delta(x)$= **0,5·10^{-2};**
11) x = **22,351** $\delta(x)$= **0,1;**	**26)** x = **1,22453** $\delta(x)$= **10%;**
12) x = **9,4698** $\delta(x)$= **0,1·10^{-2};**	**27)** x = **0,000335** $\delta(x)$= **0,15;**
13) x = **47361** $\delta(x)$= **0,01;**	**28)** x = **8,395** $\delta(x)$= **0,1%;**
14) x = **12,8370** $\delta(x)$= **1%;**	**29)** x = **20,351** $\delta(x)$= **0,1;**
15) x = **0,3328** $\delta(x)$**0,2·10^{-1};**	**30)** x = **9,4636** $\delta(x)$= **0,1·10^{-2};**

Завдання 3. Для нелінійнійного рівняння відокремити будь-який з коренів і уточнити його методом бісекції з точністю $\varepsilon = 0{,}00001$.

1. sin(x+0,5)-0,3(x-0,2)^2= 0;

2. cos(x+1)-0,2(x-0,7)^2= 0;

3. sin(x+0,7)-0,5e$^{x-0,2}$ = 0;

4. cos(x+0,2)+0,5e^{x-1}-0,8= 0;

5. $\sin(1\text{-}2x)\text{-}0{,}5e^{x-0,7} = 0$;

6. $\cos(2x\text{-}0{,}7)\text{-}0{,}3e^{0,5-x} = 0$;

7. $\sin(0{,}3\text{-}x)+0{,}5(x\text{-}0{,}1)^2 = 0$;

8. $\cos(0{,}6\text{-}x)+0{,}1(x\text{-}1)^2\text{-}0{,}3 = 0$;

9. $\sin(2x+0{,}5)\text{-}0{,}7\ln(x+3{,}2) = 0$;

10. $\cos(1{,}8x\text{-}0{,}3)+0{,}5\ln(x+3{,}2) = 0$;

11. $\sin(1{,}9x\text{-}0{,}5)+0{,}3\ln(x+3{,}2) = 0$;

12. $\sin(1{,}3x\text{-}2{,}3)+0{,}6\ln(x+4) = 0$;

13. $x\ln(x+1)=1$;

14. $tg(x)=1/x$;

15. $e^{-x}=\sin(x)$.

8. Хід роботи

1) У звіті до лабораторної роботи виконати **Завдання 1** та **Завдання 2** свого варіанту.

2) Відокремити корінь рівняння свого варіанту (**Завдання 3**) графічним способом та уточнити його двома ітераціями методу бісекції з допомогою калькулятора. Результати записати у звіт. У якості калькулятора можна скористатися інтерпретатором **Python** в режимі командного рядка.

3) Уточнити корінь рівняння свого варіанту (**Завдання 3**) методом бісекції з заданою точністю засобами **OpenOffice.** Записати у звіт уточнений корінь та кількість ітерацій.

4) Реалізувати програму на **Python**, яка знаходить методом бісекції відокремлений на заданому проміжку корінь рівняння свого варіанту з заданою точністю. Визначити кількість ітерацій**.** У звіт подати код програми та результат її виконання.