Лабораторна робота № 2. Розв'язування нелінійних рівнянь. Метод хорд, метод дотичних.

1. Метод дотичних

Нехай ліва частина $f(x)$ заданого рівняння $f(x)=0$ неперервна на відрізку $[a,b]$, на якому відокремлено корінь разом з похідними $f'(x)$ та $f''(x)$, причому $f'(x)$ та $f''(x)$ зберігають знак на цьому відрізку. Застосування методу дотичних ґрунтується на побудові послідовних наближень до розв'язку x^* рівняння за допомогою рекурентних співвідношень

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \qquad (n = 1,2,\ldots).$$

Геометрично формули методу можна інтерпретувати так: наступне наближення x_n до розв'язку рівняння знаходимо як точку перетину з віссю Ox дотичної $y - f(x_{n-1}) = f'(x_{n-1})(x - x_{n-1})$ до графіка функції $f(x)$ у точці x_{n-1} (див. рис. 3). З цього факту і походить назва методу.

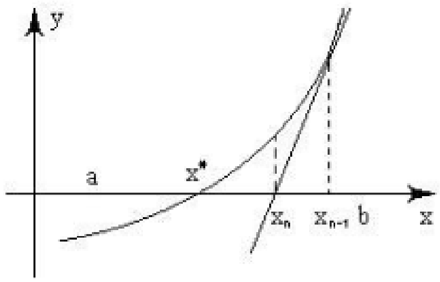

Рис. 3

Вибір початкового наближення x_0 залежить від знака другої похідної $f''(x)$ на кінцях відрізка $[a,b]$. Оскільки на цьому відрізку міститься відокремлений корінь рівняння то значення $f(a)$ та $f(b)$ мають протилежні знаки. За припущенням $f''(x)$ на відрізку $[a,b]$ зберігає знак, то матиме місце одна з двох таких ситуацій.

I. Значення $f(a)$ та $f''(a)$ мають одинаковий знак, тобто $f(a)f''(a) > 0$. В цьому випадку за початкове наближення приймаємо $x_0 = a$.

II. Значення $f(b)$ та $f''(b)$ мають одинаковий знак, тобто $f(b)f''(b) > 0$. В цьому випадку за початкове наближення приймаємо $x_0 = b$.

2. Реалізація методу дотичних за допомогою калькулятора

1. Для рівняння $x-\cos(x)=0$ маємо $f(x)=x-\cos(x)$, $f'(x)=1+\sin(x)$, $f''(x)=\cos(x)$. Шукатимемо корінь рівняння на відрізку $[0;1{,}5]$. На кінцях відрізка $f(0)=-1$, $f''(0)=1$, $f(1{,}5)\approx 1{,}429262$, $f''(1{,}5)\approx 0{,}070738$, отже початкове наближення $x_0=1{,}5$.

2. Знаходимо x_1 за формулою $x_1=x_0-\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.

$f(1{,}5)=1{,}5-\cos(1{,}5)\approx 1{,}429262$, $\qquad f'(1{,}5)=1+\sin(1{,}5)\approx 1{,}997495$

$$x_1\approx 1{,}5-\frac{1{,}429262}{1{,}997495}\approx 0{,}784473.$$

3. Наступне наближення $x_2=x_1-\dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$:

$f(x_1)=0{,}784473-\cos(0{,}784473)\approx 0{,}076712$, $f'(x_1)=1+\sin(0{,}784473)\approx 1{,}706452$,

$$x_2\approx 0{,}784473-\frac{0{,}076712}{1{,}706452}\approx 0{,}739519.$$

Продовжуючи обчислення, можна знайти розв'язок із заданою точністю.

3. Реалізація методу дотичних за допомогою ЕТ

1. Запускаємо програму **OpenOffice**, переходимо на вільний робочий лист (або створюємо новий). Записуємо заголовки таблиці, для обчислень

	A	B	C	D	E	F
1	Номер ітерації	x	f(x)	f'(x)	x=x-f(x)/f'(x)	|x-x|
2						
3						
4						

Рис .4

2. В комірку **B2** записуємо початкове наближення: **1,5**. В комірки **C2, D2, E2, F2** та **B3** – відповідні формули для обчислень (див. рис.5).

	A	B	C	D	E	F
1	Номер ітерації	x	f(x)	f'(x)	x=x-f(x)/f'(x)	|x-x|
2	1	1,5	=B2-COS(B2)	=1+SIN(B2)	=B2-C2/D2	=ABS(B2-E2)
3	2	=E2	=B3-COS(B3)	=1+SIN(B3)	=B3-C3/D3	=ABS(B3-E3)
4	3	=E3	=B4-COS(B4)	=1+SIN(B4)	=B4-C4/D4	=ABS(B4-E4)

Рис. 5

3. Використовуючи автозаповнення проводимо обчислення, доки в останній заповненій комірці стовпця **F** не отримаємо значення, менше за вказану похибку ε .

	A	B	C	D	E	F
1	Номер ітерації	x	$f(x)$	$f'(x)$	$\underline{x}=x-f(x)/f'(x)$	$\lvert\underline{x}-x\rvert$
2	1	1,50000	1,42926	1,99749	0,78447	0,71553
3	2	0,78447	0,07671	1,70645	0,73952	0,04495
4	3	0,73952	[illegible]	[illegible]393	0,73909	0,00043
5	4	0,73909	[illegible]	[illegible]361	0,73909	0,00000
6						
7						

Шуканий наближений розв'язок

Рис .6

Для методу дотичних точність у 5 знаків після коми досягається вже на 4-му кроці алгоритму. Наближений розв'язок рівняння отримуємо в останній заповненій комірці стовпця **B**.

4. Метод хорд

Нехай ліва частина $f(x)$ заданого рівняння $f(x)=0$ неперервна на відрізку $[a,b]$, на якому відокремлено корінь ($f(a)f(b)<0$) і, крім того, похідні $f'(x)$ та $f''(x)$ визначені і зберігають знак на цьому відрізку.

Перше наближення x_1 до розв'язку рівняння x^* знаходимо за формулою

$$x_1 = a - \frac{(b-a)f(a)}{f(b)-f(a)}.$$

Залежно від вигляду функції $f(x)$ тут можливі два випадки.

I. Шуканий розв'язок x^* розташований на відрізку $[x_1,b]$. Така ситуація можлива, коли на відрізку $[a,b]$ $f'(x)>0$ і $f''(x)>0$ (див. рис. 7а)), або $f'(x)<0$ і $f''(x)<0$ (рис. 7б). Обидва ці варіанти можна об'єднати за допомогою умови $f'(x)f''(x)>0$. В цьому випадку ітераційний процес методу хорд будується за формулами

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n-b)f(x_n)}{f(x_n)-f(b)} \qquad (n=1,2,\dots)$$

Отриманий ітераційний процес збігається, бо $a<x_1<x_2<\dots<x_n<x^*$, тобто послідовність $\{x_n\}$ є монотоно зростаючою та обмеженою зверху.

II. Шуканий розв'язок x^* розташований на відрізку $[a,x_1]$. Така ситуація можлива, коли на відрізку $[a,b]$ $f'(x)<0$ і $f''(x)>0$ (див. рис. 7в)), або $f'(x)>0$ і $f''(x)<0$ (рис. 7г). Для обидвох варіантів $f'(x)f''(x)>0$. В цьому випадку ітераційний процес методу хорд будується за формулами

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n-a)f(x_n)}{f(x_n)-f(a)} \qquad (n=1,2,\dots)$$

В цьому випадку $x^*<x_n<\dots<x_2<x_1<b$, тобто послідовність $\{x_n\}$ збігається бо вона монотоно спадна та обмежена знизу. Для обидвох випадків приблизну оцінку отриманого наближення можна отримати у формі $|x^*-x_n| \le \frac{|f(x_n)|}{m}$, де $0 \le m \le |f'(x)|$.

Для оцінки похибки наближення можна також використрвувати величину $|x_{n+1}-x_n|$.

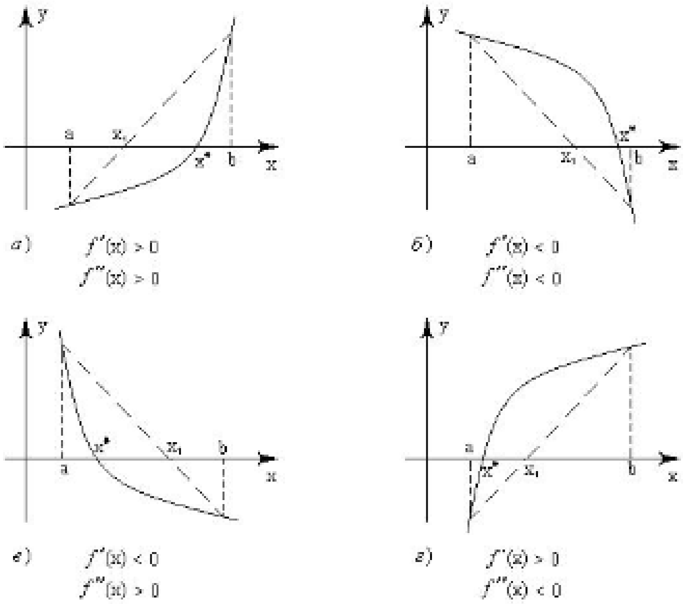

Рис.7

5. Реалізація методу хорд за допомогою калькулятора

1. Для рівняння $x - \cos(x) = 0$ маємо $f(x) = x - \cos(x)$, $f'(x) = 1 + \sin(x)$, $f''(x) = \cos(x)$. Як і у випадку методу бісекції шукатимемо корінь рівняння на відрізку $[0;1,5]$. Для всіх точок x цього відрізка $f'(x) > 0$ і $f''(x) > 0$, отже послідовні наближення будуємо за формулами $x_{n+1} = x_n - \dfrac{(x_n - b)f(x_n)}{f(x_n) - f(b)}$.

2. Знаходимо x_1 за формулою $x_1 = a - \dfrac{(b-a)f(a)}{f(b) - f(a)}$.

$a = 0$, $f(0) = 0 - \cos(0) = -1$,

$b = 1,5$, $f(1,5) = 1,5 - \cos(1,5) \approx 1,5 - 0,070737 = 1,429263$,

$$x_1 \approx 0 - \frac{(1,5 - 0)\cdot(-1)}{1,429263 - (-1)} \approx 0,617471.$$

3. Наступні наближення:

$$x_2 = x_1 - \frac{(x_1 - b)f(x_1)}{f(x_1) - f(b)},$$

$f(x_1) = 0,617471 - \cos(0,617471) \approx -0,197874$,

$$x_1 \approx 0,617471 - \frac{(0,617471 - 1,5 - 0)\cdot(-0,197874)}{-0,197874 - 1,429263} \approx 0,724794.$$

$$x_3 = x_2 - \frac{(x_2 - b)f(x_2)}{f(x_2) - f(b)},$$

$$f(x_2) = 0{,}724794 - \cos(0{,}724794) \approx -0{,}023842,$$

$$x_3 \approx 0{,}724794 - \frac{(0{,}724794 - 1{,}5)\cdot(-0{,}023842)}{-0{,}023842 - 1{,}429263} \approx 0{,}737513.$$

Як бачимо, після трьох кроків методу хорд величина $|x_{n+1} - x_n|$ становить $|x_3 - x_2| \approx 0{,}737513 - 0{,}724794 = 0{,}012719$, продовжуючи обчислення, можна знайти таке x_n, для якого вона стане меншою ніж задана точність обчислення. Таким чином, можна стверджувати, що після трьох кроків методу хорд корінь рівняння знайдено з точністю $0{,}013$.

6. Реалізація методу хорд засобами OpenOffice

1. Запускаємо програму OpenOffice , переходимо на вільний робочий лист.

Заповнюємо заголовок таблиці, в якій будемо виконувати обчислення

	A	B	C	D	E	F
1	Номер ітерації	x	f(a)	f(x)	x = x-f(x)(a-x)/(f(a)-f(x))	|x -x|
2						
3						
4						

Рис. 8

2. Заповнюємо комірки з початковими наближеннями та формулами для обчислень:

Комірка	Формула (значення)
B2	**0 (початкове наближення)**
C2	**=1,5-COS(1,5)**
D2	**=B2-COS(B2)**
E2	**=B2-D2*(1,5-B2)/(C2-D2)**
F2	**=ABS(B2-E2)**
B3	**=E2 (наступненаближення)**

Для комірок діапазону **B3:F3** копіюємо формули із відповідних комірок діапазону **B2:F2**.

3. Використовуючи автозаповнення проводимо обчислення, доки в останній заповненій комірці стовпця F не отримаємо значення, менше за вказану похибку ε.

	A	B	C	D	E	F
1	Номер ітерації	x	f(a)	f(x)	x = x-f(x)(a-x)/(f(a)-f(x))	|x -x|
2	1	0	=1,5-COS(1,5)	=B2-COS(B2)	=B2-D2*(1,5-B2)/(C2-D2)	=ABS(B2-E2)
3	2	=E2	=1,5-COS(1,5)	=B3-COS(B3)	=B3-D3*(1,5-B3)/(C3-D3)	=ABS(B3-E3)
4	3	=E3	=1,5-COS(1,5)	=B4-COS(B4)	=B4-D4*(1,5-B4)/(C4-D4)	=ABS(B4-E4)

Рис. 9

4. Для методу хорд точність **0,00002** досягається вже на **6** кроці (див. рис. 10). Наближений розв’язок рівняння отримуємо в останній заповненій комірці стовпця **B**. Щоб скопіювати отриманий розв’язок в довільну клітинку під побудованою таблицею можна скористатися командою спеціальної вставки ***Edit ⇒ Paste Special ⇒ Values*** (***Правка ⇒ Спеціальна вставка ⇒ Значення***). Перед цим потрібно скопіювати комірку, що містить отриманий результат до буфера обміну.

	A	B	C	D	E	F
1	Номер ітерації	x	f(a)	f(x)	x-f(x)(a-x)/(f(a)-f	|x -x|
2	1	0,00000	1,42926	-1,00000	0,61747	0,61747
3	2	0,61747	1,42926	-0,19787	0,72479	0,10732
4	3	0,72479	1,42926	-0,02384	0,73751	0,01272
5	4	0,73751	1,42926	-0,00263	0,73891	0,00140
6	5	0,73891	1,42926	-0,00029	0,73907	0,00016
7	6	0,73907	1,42926	-0,00003	0,73908	0,00002
8						
9			Розв'язок	0,73908		
10						

Рис. 10

7. Комбінований метод хорд і дотичних.

Методи хорд і дотичних дають наближення кореня з різних сторін (більше або менше істинного значення кореня), тому їх часто застосовують один з одним, і уточнення кореня відбувається швидше. Якщо $f'(x)\cdot f''(x)>0$, то метод хорд дає наближення кореня з недостачею, а метод дотичних – з надлишком. Якщо ж $f'(x)\cdot f''(x)<0$, то методом хорд одержуємо значення кореня з надлишком, а методом дотичних – із недостачею. Проте в усіх випадках істинне значення кореня знаходиться між наближеними значеннями коренів, що отримуються методом хорд і методом дотичних.

Нехай x_{n+1} і $\overline{x}_{n+1}$ – наближені значення кореня з недостачею і з надлишком.

1. Якщо $f(a)\cdot f''(x)>0$ на $[a,b]$ (при цьому $x_0=a,\quad \overline{x}_0=b$), то

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)};\ \overline{x}_{n+1}=\overline{x}_n-f(\overline{x}_n)\frac{\overline{x}_n-x_n}{f(\overline{x}_n)-f(x_n)},$$

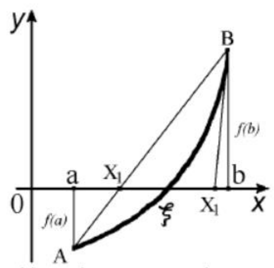

Рис. 4.16. Графічна інтерпретація методу дотичних

2. Якщо $f(b)\cdot f''(x)>0$ на $[a,b]$ (при цьому $x_0=a,\quad \overline{x}_0=b$), то

$$x_{n+1}=x_n-f(x_n)\frac{\overline{x}_n-x_n}{f(\overline{x}_n)-f(x_n)};\ \overline{x}_{n+1}=\overline{x}_n-\frac{f(\overline{x}_n)}{f'(\overline{x}_n)},$$

Нехай $x = \beta \in (\mathrm{a}, \mathrm{b})$ єдиний корінь рівняння Якщо $f(\mathrm{a})\mathrm{f}'(\mathrm{a}) > 0$, то $x_0 = a - \dfrac{f(\mathrm{a})}{f'(\mathrm{a})}; x_1 = \dfrac{af(\mathrm{b}) - \mathrm{bf(a)}}{f(\mathrm{b}) - \mathrm{f(a)}}$ Якщо $f(\mathrm{b})\mathrm{f}'(\mathrm{b}) > 0$, $x_0 = b - \dfrac{f(\mathrm{b})}{f'(\mathrm{v})}; x_1 = \dfrac{af(\mathrm{b}) - \mathrm{bf(a)}}{f(\mathrm{b}) - f(\mathrm{a})}$.

Значить, можна наближатися до кореня, наприклад, зліва методом

Ньютона , а справа методом січних (рис. 11):

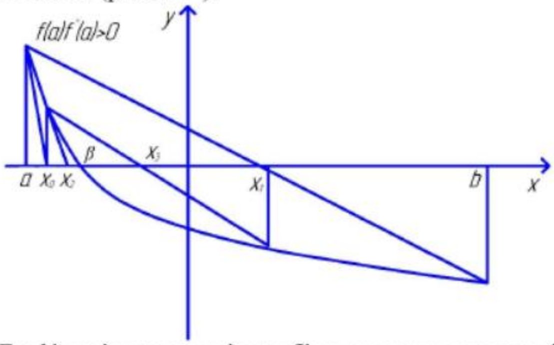

Рис. 11 . Графічна інтерпретація комбінованого методу хорд і дотичних

$$x_{2n} = x_{2n-2} - f\,\frac{f(x_{2n-2})}{f'(x_{2n-2})},$$

$$x_{2n+1} = \frac{x_{2n-2}f(x_{2n-1}) - x_{2n-1}f(x_{2n-2})}{f(x_{2n-1}) - f(x_{2n-2})}, n = 1, 2...$$

Очевидно, що $\beta \in [x_n, x_{n-1}]$ і $\lim\limits_{x\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{x\to\infty} x_{2n+1} = \beta$.

8. Варіани заавдань.

№	Рівняння	№	Рівняння
1	$\ln^2(x-1) = 3\cos 2x + 1$	2	$\sqrt{25 - x^2} = \mathrm{arctg} 2x$
3	$\frac{3\pi}{2}\cos x = e^{0,1x^2}\mathrm{arcctg} 2x$	4	$\sin x\sqrt{81 - x^2} = 5x\mathrm{arctg} x$
5	$10e^{-x^2} = \sqrt{2\pi x} + \sin x$	6	$\mathrm{arctg} 2x - 0,2(x-1)^4 + \sin x = 0$
7	$\sqrt{\ln^2(x-1)e^{\sin 3x}} = 10e^{-0,1x^2}$	8	$\sin 3x\sqrt{64 - x^2} = 5xe^{0,1x}$
9	$\sqrt{36 - x^2}\lg x = \sin 4x$	10	$\mathrm{arctg} 2x - \frac{(x-1)^4}{5} + \sin^2 5x = 0$
11	$\frac{10}{1+x^2} = 2\sin 2x + x$	12	$10e^{-0,1x^2} = \sqrt{2\pi + x} + \sin 2x$

9 Хід роботи

1) Відокремити корінь рівняння свого варіанту графічним способом та уточнити його двома ітераціями методу дотичних з допомогою калькулятора. Результати записати у звіт. У якості калькулятора можна скористатися інтерпретатором **Python** в режимі командного рядка.

2) Уточнити корінь рівняння свого варіанту методом дотичних з заданою точністю засобами **OpenOffice.** Записати у звіт уточнений корінь та кількість ітерацій.

3) Реалізувати програму на **Python**, яка знаходить методом дотичних відокремлений на заданому проміжку корінь рівняння свого варіанту з заданою точністю. Визначити кількість ітерацій**.** У звіт подати код програми та результат її виконання.

4) Уточнити корінь рівняння свого варіанту методом хорд з заданою точністю засобами **OpenOffice.** Записати у звіт уточнений корінь та кількість ітерацій.

5) Реалізувати програму на **Python**, яка знаходить методом дотичних відокремлений на заданому проміжку корінь рівняння свого варіанту з заданою точністю. Визначити кількість ітерацій**.** У звіт подати код програми та результат її виконання.

6) Реалізувати програму на **Python**, яка знаходить комбінованим методом хорд та дотичних відокремлений на заданому проміжку корінь рівняння свого варіанту з заданою точністю. У звіт подати код програми та результат її виконання.