Лабораторна робота № 3. Розв’язування нелінійних рівнянь. Ітераційні методи.

1. Метод послідовних наближень (ітерацій).

Для методу простих ітерацій задане рівняння $f(x)=0$ потрібно перетворити до вигляду $x=\varphi(x)$. Після цього для знаходження послідовних наближень використовують рекурентні формули $x_n=\varphi(x_{n-1})$ $(n=1,2,...)$.

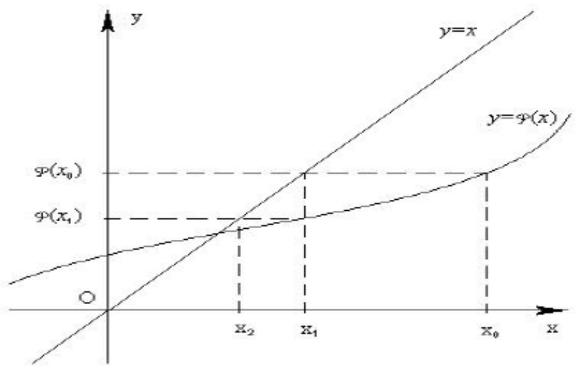

Рис. 1

Незалежно від вибору початкового наближення x_0 умовою збіжності такого ітераційного процесу є виконання на відрізку $[a;b]$ нерівності $|\varphi'(x)|\le q<1$.

Для оцінки похибки методу можна скористатися співвідношеннями

$$|x^*-x_n|\le\frac{q}{1-q}|x_n-x_{n-1}|, \quad \text{або} \quad |x^*-x_n|\le\frac{q^n}{1-q}|x_1-x_0|.$$

2. Реалізація методу дотичних за допомогою калькулятора

1. Рівняння $x-\cos(x)=0$ можна подати у вигляді $x=\cos(x)$, тобто $\varphi(x)=\cos(x)$. На відрізку $[0;1{,}5]$ $\varphi'(x)=\sin(x)\le\sin(1{,}5)\approx 0{,}997495<1$, тобто ітераційний процес $x_n=\cos(x_{n-1})$ збігається.

2. Приймемо за x_0 довільне число з відрізка $[0;1{,}5]$, наприклад $x_0=0{,}5$.

Знаходимо $x_1=\cos(x_0)=\cos(0{,}5)\approx 0{,}877583$.

3. Наступні наближення.

$x_2=\cos(x_1)\approx\cos(0{,}877583)\approx 0{,}639012$,

$x_3=\cos(x_2)\approx\cos(0{,}639012)\approx 0{,}802685$,

$x_4=\cos(x_3)\approx\cos(0{,}802685)\approx 0{,}694778$,

$x_5 = \cos(x_4) \approx \cos(0{,}694778) \approx 0{,}768189$,

$x_6 = \cos(x_5) \approx \cos(0{,}768189) \approx 0{,}719170$,

$x_7 = \cos(x_6) \approx \cos(0{,}719170) \approx 0{,}752353$.

Як бачимо, послідовні наближення збігаються, і точність знайденого розв'язку на 7-ій ітерації рівна $|x_7 - x_6| = 0{,}033183$. Продовжуючи обчислення, можна знайти розв'язок з довільною наперед заданою точністю.

3. Реалізація методу дотичних за допомогою ЕТ

1. Запускаємо програму OpenOffice , переходимо на вільний робочий лист. Заповнюємо заголовки стовпців.

2. В комірку B2 записуємо початкове наближення: 0,5, а в комірки C2, D2 та B3 – відповідні формули для обчислень:

Комірка	Формула
C2	=COS(B2)
D2	=ABS(B2-C2)
B3	=C2

3. Використовуючи автозаповнення проводимо обчислення, доки в останній заповненій комірці стовпця C не отримаємо значення, менше за вказану похибку ε.

	A	B	C	D
1	Номер ітерації	x	$x = fi(x)$	$\lvert x\text{-}x\rvert$
2	1	0,50000	0,87758	0,37758
3	2	0,87758	0,63901	0,23857
4	3	0,63901	0,80269	0,16367
5	4	0,80269	0,69478	0,10791
6	5	0,69478	0,76820	0,07342
7	6	0,76820	0,71917	0,04903
8	7	0,71917	0,75236	0,03319
9	8	0,75236	0,73008	0,02227
10	9	0,73008	0,74512	0,01504
11	10	0,74512	0,73501	0,01011
12	11	0,73501	0,74183	0,00682
13	12	0,74183	0,73724	0,00459
14	13	0,73724	0,74033	0,00309
15	14	0,74033	0,73825	0,00208
16	15	0,73825	0,73965	0,00140
17	16	0,73965	0,73870	0,00095
18	17	0,73870	0,73934	0,00064
19	18	0,73934	0,73891	0,00043
20	19	0,73891	0,73920	0,00029
21	20	0,73920	0,73901	0,00019
22	21	0,73901	0,73914	0,00013
23	22	0,73914	0,73905	0,00009
24				

Рис. 2

Для методу ітерацій точність досягається на 22-му кроці алгоритму. Наближений розв'язок рівняння отримуємо в останній заповненій комірці стовпця C.

4. Метод релаксації

Перетворити рівняння $f(x) = 0$ до вигляду $x = \varphi(x)$, взагалі кажучи, можна різними способами. Проте при перетворенні рівняння слід врахувати, що на відрізку $[a; b]$, на якому відокремлено корінь рівняння функція $x = \varphi(x)$ має задовольняти вказану вище умову $|\varphi'(x)| \le q < 1$, або ж умову Ліпшиця:

$$|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| \le q|x_2 - x_1|, \text{де } x_1, x_2 \in [a, b],$$
$$q \in (0,1) - \text{деяка стала.}$$

Якщо вибрати $\varphi(x)$ так, що жодна з ці умови не виконуються, то ітераційний процес буде розбіжний.

Функцію $\varphi(x)$ можна побудувати за формулою

$$\varphi(x) = x + \tau(x) \cdot f(x),$$

де $\tau(x)$ - деяка знакостала неперервна функція. Якщо замість функція $\tau(x)$, взяти деяку сталу, тобто

$$\varphi(x) = x + \tau \cdot f(x),$$

То ітераційний процес буде збіжним при

$$-2 < \tau f(x) < 0.$$

Якщо в деякому околі кореня виконуються умови

$$f'(x) < 0, \quad 0 < m_1 < |f'(x)| < M_1,$$

то метод збігається при $\tau \in (0, 2/M_1)$. Збіжність буде найкращою при

$$\tau = \tau_{\text{опт}} = 2/(m_1 + M_1).$$

При такому виборі τ для похибки $z_n = x_n - x_*$ буде мати місце оцінка

$$|z_n| \le q^n |z_0|, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

де $q = (M_1 - m_1)/(M_1 + m_1)$.

Такий підхід отримав в літературі назву метод ***релаксації***.

5. Варіани завдань.

№	Рівняння	№	Рівняння
1	$\sin(\ln\lvert x\rvert)=0.7$	9	$e^{-2x}+\frac{3}{x}-1=0$
2	$4e^{-1/\lvert x\rvert}-2=0$	10	$3^{x}+(x+1)^{2}-5=0$
3	$2^{x}-4x=0$	11	$3^{x}-9x+1=0$
4	$\ln x+(x+1)^{3}=0$	12	$2^{x}+\ln 2x-5.6=0$
5	$arctg(x-2)+x=0$	13	$2^{x}+e^{-x}-5x+1=0$
6	$x^{2}+4\sin x-2=0$	14	$\frac{e^{x}}{2}-(x-1)^{2}=0$
7	$x-\ln(7-4x)=0$	15	$x+\lg x-0.5=0$
8	$3^{x}+\ln 3x-4=0$ (1 корінь)		

6 Хід роботи

1) Відокремити корінь рівняння свого варіанту графічним способом та уточнити його двома ітераціями методу послідовних наближень з допомогою калькулятора. Результати записати у звіт. У якості калькулятора можна скористатися інтерпретатором **Python** в режимі командного рядка.

2) Уточнити корінь рівняння свого варіанту методом послідовних наближень з заданою точністю засобами **OpenOffice.** Записати у звіт уточнений корінь та кількість ітерацій.

3) Реалізувати програму на **Python**, яка знаходить методом послідовних наближень відокремлений на заданому проміжку корінь рівняння свого варіанту з заданою точністю. Визначити кількість ітерацій**.** У звіт подати код програми та результат її виконання.

4) Реалізувати програму на **Python**, яка знаходить відокремлений на заданому проміжку корінь рівняння свого варіанту з заданою точністю засобами модуля **SciPy**. Порівняти результати.