Лабораторна робота № 4. Інтерполяція функції. Формула Лагранжа.

1. Інтерполяція та апроксимація функцій

На практиці часто зустрічаються випадки, коли для функції невідомий її аналітичний вигляд, а відомі лише її значення в скінченній кількості точок. Ці значення можуть бути навіть наближеними (наприклад, знайдені експериментально). Тому виникає потреба невідому нам функцію наближено замінити більш простішою (наприклад, поліномом), яка б в обчисленнях відображала вихідну функцію.

Будемо вважати, що для функції $y = f(x)$ відомі її значення в точках $x_0, x_1, ..., x_n$.

Розглянемо два підходи до побудови наближеної функції:

1) Наближену функцію $y = F(x)$ вибираємо так, щоб в точках $x_0, x_1, ..., x_n$ вона співпадала з вихідною функцією, тобто виконувалась умова

$$F(x_i) = f(x_i), \quad i = 0,1,...,n.$$

Такий спосіб наближення будемо називати ***інтерполяцією***, точки $x_0, x_1, ..., x_n$ – ***вузлами інтерполяції***, а $y = F(x)$ – інтерполяційною формулою для обчислення значень функції $y = f(x)$.

2) Наближену функцію $y = F(x)$ на інтервалі $[x_0, x_n]$ вибираємо так, щоб різниця $f(x) - F(x)$ на цьому проміжку була мінімальною за певним критерієм. В цьому випадку не вимагається співпадання значень наближеної та вихідної функції в точках $x_0, x_1, ..., x_n$. Такий спосіб наближення будемо називати ***апроксимацією***.

2. Інтерполяційний поліном Лагранжа

Один з підходів до задачі інтерполяції – метод Лагранжа. Основна ідея цього методу полягає в пошуку поліному, який приймає значення 1 в одному довільному вузлі інтерполяції і значення 0 у всіх інших вузлах.

Наближену функцію $y = F(x)$ представимо у вигляді

$$F(x) = L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} P_i(x) f(x_i),$$

$$P_i(x_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}, \quad i, j = 0,1,...,n.$$

Оскільки точки $x_0, x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n$ є коренями многочлена $P_i(x)$, то його можна записати наступним чином

$$P_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})...(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)...(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_n)},$$

а наближена функція $F(x)$, яку називають ***інтерполяційним многочленом Лагранжа***, матиме вигляд

$$F(x) = L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})...(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)...(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_n)} f(x_i).$$

Обчислимо значення інтерполяційного поліному Лагранжа в точці $x = 4$, якщо задано значення вихідної функції в точках:

x	-1	0	1	2	3
y	5	1	1	11	61

3. Обчислення значення поліному Лагранжа за допомогою калькулятора

1. Знаходимо перший доданок суми при $i = 0$ $(x_i = -1)$

$$L\_0 = \frac{(4-0)(4-1)(4-2)(4-3)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)(-1-3)} = \frac{24}{24} = 1.$$

2. Знаходимо другий доданок суми при $i = 1$ $(x_i = 0)$

$$L\_1 = \frac{(4+1)(4-1)(4-2)(4-3)}{(0+1)(0-1)(0-2)(0-3)} = \frac{30}{-6} = -5.$$

3. Знаходимо третій доданок суми при $i = 2$ $(x_i = 1)$

$$L\_2 = \frac{(4+1)(4-0)(4-2)(4-3)}{(1+1)(1-0)(1-2)(1-3)} = \frac{40}{4} = 10.$$

4. Знаходимо четвертий доданок суми при $i = 3$ $(x_i = 2)$

$$L\_3 = \frac{(4+1)(4-0)(4-1)(4-3)}{(2+1)(2-0)(2-1)(2-3)} = \frac{60}{-6} = -10.$$

5. Знаходимо п’ятий доданок суми при $i = 4$ $(x_i = 3)$

$$L\_4 = \frac{(4+1)(4-0)(4-1)(4-2)}{(3+1)(3-0)(3-1)(3-2)} = \frac{120}{24} = 5.$$

6. Знаходимо значення поліному $L_4(4)$

$$L_4(4) = (L\_0)f(-1) + (L\_1)f(0) + (L\_2)f(1) + (L\_3)f(2) + (L\_4)f(3) =$$

$$= 1\cdot 5 + (-5)\cdot 1 + 10\cdot 1 + (-10)\cdot 11 + 5\cdot 61 = 205.$$

4. Обчислення значення поліному Лагранжа засобами OpenOffice

1. Запускаємо програму **OpenOffice**, переходимо на вільний робочий лист. Створюємо таблицю, в якій будемо виконувати обчислення

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Інтерполяційний поліном Лагранжа											
2								Значення аргумента				
3	x	y	Різниці чисельника					Різниці знаменника				
4												
5												
6												
7												
8												
9	Добутки											
10	Відношення							Результат				

2. В діапазон **A4:A8** вводимо задані нам значення x_i, а в **B4:B8** – значення функції y_i. В клітинку **L2** вводимо значення аргумента x, при якому буде обчислюватись значення інтерполяційного поліному Лагранжа (в даному випадку $x = 4$).
Обчислюємо різниці чисельника поліному

Комірка	Формула (значення)
C4:G4	**=$L$2-A4**
C5:G5	**=$L$2-A5**
C6:G6	**=$L$2-A6**
C7:G7	**=$L$2-A7**
C8:G8	**=$L$2-A8**

3. В діагональні значення блоку **C4:G8** вводимо число **1** (**C4=D5=E6=F7= =G8=1**).

4. Обчислюємо різниці знаменника поліному

Комірка	Формула (значення)
H4	**=ЕСЛИ($A$4-A4=0;1;$A$4-A4)**
I4	**=ЕСЛИ($A$5-A4=0;1;$A$5-A4)**
J4	**=ЕСЛИ($A$6-A4=0;1;$A$6-A4)**
K4	**=ЕСЛИ($A$7-A4=0;1;$A$7-A4)**
L4	**=ЕСЛИ($A$8-A4=0;1;$A$8-A4)**

Копіюємо кожну з введених формул в межах відповідного стовпчика, заповнюючи формулами блок **H5:L8**.
5. Обчислюємо добутки різниць чисельника та знаменника

Комірка	Формула (значення)
C9	**=ПРОИЗВЕД(C4:C8)**

Копіюємо введену формулу в межах рядка до клітинки **L9** включно.

6. Обчислюємо доданки інтерполяційного поліному, як відношення відповідного значення чисельника та знаменника

Комірка	Формула (значення)
C10	**=C9/H9**

Копіюємо введену формулу в межах рядка до клітинки **G10** включно.

7. Обчислюємо значення інтерполяційного поліному Лагранжа

Комірка	Формула (значення)
L10	**=B4*C10+B5*D10+B6*E10+B7*F10+B8*G10**

В результаті виконання обчислень отримаємо:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	**Інтерполяційний поліном Лагранжа**											
2								Значення аргумента				**4**
3	x	y	Різниці чисельника					Різниці знаменника				
4	-1	5	1	5	5	5	5	1	1	2	3	4
5	0	1	4	1	4	4	4	-1	1	1	2	3
6	1	1	3	3	1	3	3	-2	-1	1	1	2
7	2	11	2	2	2	1	2	-3	-2	-1	1	1
8	3	61	1	1	1	1	1	-4	-3	-2	-1	1
9	Добутки		24	30	40	60	120	24	-6	4	-6	24
10	Відношення		1	-5	10	-10	5	Результат				**205**

Змінюючи значення аргумента в клітинці **L2** отримаємо нове значення інтерполяційного поліному в клітинці **L10**:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Інтерполяційний поліном Лагранжа											
2								Значення аргумента				**5**
3	x	y	Різниці чисельника					Різниці знаменника				
4	-1	5	1	6	6	6	6	1	1	2	3	4
5	0	1	5	1	5	5	5	-1	1	1	2	3
6	1	1	4	4	1	4	4	-2	-1	1	1	2
7	2	11	3	3	3	1	3	-3	-2	-1	1	1
8	3	61	2	2	2	2	1	-4	-3	-2	-1	1
9	Добутки		120	144	180	240	360	24	-6	4	-6	24
10	Відношення		5	-24	45	-40	15	Результат				**521**

5. Варіани завдань.

x_i - вузли інтерполяції, y_i - значення функції в вузлах інтерполяції, x - значення аргументу, для якого слід визначити значення заданої таблцею невідомої ф-ції.

№	**Індивідуальне завдання**						x
1.	x_i	-2	-1	0	1	2	0,5
	y_i	0,37	1,00	2,72	7,39	20,09	
2.	x_i	-4	-2	0	2	4	-3,5
	y_i	3,26	1,59	2,50	3,41	1,74	
3.	x_i	-1	0	1	2	3	-1,2
	y_i	7,5	-5,5	-16,5	-25,5	-32,5	
4.	x_i	-5	-3	-1	1	3	-2
	y_i	25,96	8,86	0,16	1,84	9,14	
5.	x_i	1	4	7	10	13	9

	y_i	1,37	5,40	8,95	12,30	15,56	
6.	x_i	-5	-3	-1	1	3	0,5
	y_i	173,41	29,09	3,72	1,37	25,01	
7.	x_i	-2	-1	0	1	2	1,4
	y_i	-1,51	0,38	1,00	0,70	0,67	
8.	x_i	-5	0	5	10	15	6
	y_i	33,16	35,00	33,16	34,41	34,15	
9.	x_i	-2	-1	0	1	2	0,6
	y_i	-21	6	7	0	3	
10.	x_i	-3	-1	1	3	5	-2
	y_i	48	6	0	34	252	
11.	x_i	-2	-1	0	1	2	0,7
	y_i	13,39	4,72	1,00	0,37	2,14	
12.	x_i	-4	-2	0	2	4	1,3
	y_i	67,27	18,08	-5,00	18,08	67,27	
13.	x_i	3	4	5	6	7	3,6
	y_i	-42,14	67,27	98,58	139,20	192,23	
14.	x_i	3	5	7	9	11	6
	y_i	10,84	11,04	9,91	10,42	11	
15.	x_i	-5	-3	-1	1	3	2
	y_i	153,41	32,09	4,72	0,37	6,05	

6 Хід роботи

Обчисліть значення многочлена Лагранжа в заданій точці для таблиці свого варіанта:

1) Вручну, з використанням калькулятора.
2) Створивши для розрахунків електронну таблицю .
3) Реалізувавши програму на **Python.**