Лабораторна робота № 9. Чисельні методи розв'язання задачі Коші. Метод Рунге-Кутта.

1. Розв'язування задачі Коші методом Рунге-Кутта.

Розглянемо чисельний метод Рунге-Кутта розв'язування звичайних диференціальних рівнянь 1-го порядку

$$y' = f(x, y) \qquad (1)$$

Розв'язати рівняння (1) – це означає знайти всі криві на площині, що перетворюють його у тотожність. Кожне диференціальне рівняння має безліч розв'язків. Тому для знаходження частинного розв'язку треба вказати початкові дані, тобто задати точку через яку проходить крива ров'язку.

Розглянемо диференціальне рівняння (1) і поставимо задачу Коші: серед всіх розв'язків диференціального рівняння (1) потрібно знайти такий $y=y(x)$, що задовольняє початковій умові

$$y(x_0)=y_0 \qquad (2)$$

Розв'яжемо задачу Коші (1)-(2) методом Рунге-Кутта.

Для обчислення розв'язку $y(x)$ в точках x_i деякого фіксованого відрізку $[a,b]$,

де

$$x_i = x_0 + i \cdot h \ \ (i=1, 2,\ldots, n), \qquad (3)$$

$h = \dfrac{b-a}{n}$ – крок методу, $x_0=a$, $x_n=b$ застосуємо рекурентну формулу:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i\,, \quad (i = 0, 1, 2\ldots, n) \qquad (4)$$

де $\Delta y_i = \frac{1}{6}(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)})$;

$$k_1^{(i)} = h \cdot f(x_i, y_i);$$
$$k_2^{(i)} = h \cdot f\left(x_i + h/2, y_i + k_1^{(i)}/2\right);$$
$$k_3^{(i)} = h \cdot f\left(x_i + h/2, y_i + k_2^{(i)}/2\right);$$
$$k_4^{(i)} = h \cdot f\left(x_i + h, y_i + k_3^{(i)}\right).$$

2. Реалізація методу за допомогою калькулятора.

Застосуємо метод Рунге-Кутта для знаходження наближеного розв'язку диференціального рівняння

$$y' = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad ,$$

якщо $y(0) = 1$ з кроком $h = 0{,}1$ на проміжку $[0;1]$ з точністю $\varepsilon = 0{,}001$.

1. Розбиваємо відрізок $[0;1]$ на 10 відрізків точками: 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9. Крок $h = 0{,}1$.

2. Для кожної точки $x_i = 0; 0{,}1; 0{,}2; 0{,}3; 0{,}4; 0{,}5; 0{,}6; 0{,}7; 0{,}8; 0{,}9; 1$ (i = 0, 1, 2…, n) знаходимо значення функції за допомогою рекурентної формули (4), попередньо обчисливши значення коефіцієнтів $k_1^{(i)}$, $k_2^{(i)}$, $k_3^{(i)}$, $k_4^{(i)}$, і приросту Δy_i та заносимо його в таблицю з відповідною точністю.

1) $k_1^{(0)} = h \cdot f(x_0, y_0) = 0{,}1 \dfrac{0 \cdot 1}{0^2 + 1^2} = 1$;

$$k_2^{(0)} = h \cdot f\left(x_0 + h/2, y_0 + k_1^{(0)}/2\right) = 0{,}1 \frac{(0 + 0{,}1/2) \cdot (1 + 1/2)}{(0 + 0{,}1/2)^2 \cdot (1 + 1/2)^2} = 0{,}004988;$$

$$k_3^{(0)} = h \cdot f\left(x_0 + h/2, y_0 + k_2^{(0)}/2\right) = 0{,}1 \frac{(0 + 0{,}1/2) \cdot (1 + 0{,}004988/2)}{(0 + 0{,}1/2)^2 \cdot (1 + 0{,}004988/2)^2} = 0{,}004975;$$

$$k_4^{(0)} = h \cdot f\left(x_0 + h, y_0 + k_3^{(0)}\right) = 0{,}1 \frac{(0 + 0{,}1) \cdot (1 + 0{,}004975)}{(0 + 0{,}1)^2 \cdot (1 + 0{,}004975)^2} = 0{,}009853;$$

$$\Delta y_0 = \left(k_1^{(0)} + 2k_2^{(0)} + 2k_3^{(0)} + k_4^{(0)}\right)/6 =$$

$$= (1 + 2 \cdot 0{,}004988 + 2 \cdot 0{,}004975 + 0{,}009853)/6 = 0{,}004963;$$

Тоді

$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1 + 0{,}004963 = 1{,}004963$.

2) $k_1^{(1)} = h \cdot f(x_1, y_1) = 0{,}1 \dfrac{0{,}1 \cdot 1{,}004963}{0{,}1^2 + 1{,}004963^2} = 0{,}009853$;

$$k_2^{(1)} = h \cdot f\left(x_1 + h/2, y_1 + k_1^{(1)}/2\right) = 0{,}1 \frac{(0{,}1 + 0{,}1/2) \cdot (1{,}004963 + 0{,}009853/2)}{(0{,}1 + 0{,}1/2)^2 \cdot (1{,}004963 + 0{,}009853/2)^2} = 0{,}014533;$$

$$k_3^{(1)} = h \cdot f\left(x_1 + h/2, y_1 + k_2^{(1)}/2\right) = 0{,}1 \frac{(0{,}1 + 0{,}1/2) \cdot (1{,}004963 + 0{,}014533/2)}{(0{,}1 + 0{,}1/2)^2 \cdot (1{,}004963 + 0{,}014533/2)^2} = 0{,}0145;$$

$$k_4^{(1)} = h \cdot f\left(x_1 + h, y_1 + k_3^{(1)}\right) = 0{,}1 \frac{(0{,}1 + 0{,}1) \cdot (1{,}004963 + 0{,}0145)}{(0{,}1 + 0{,}1)^2 \cdot (1{,}004963 + 0{,}0145)^2} = 0{,}018891;$$

$$\Delta y_1 = \left(k_1^{(1)} + 2k_2^{(1)} + 2k_3^{(1)} + k_4^{(1)}\right)/6 =$$

$$= (0{,}009853 + 2 \cdot 0{,}014533 + 2 \cdot 0{,}0145 + 0{,}018891)/6 = 0{,}014468;$$

Тоді
$y_2 = y_1 + \Delta y_1 = 1{,}004963 + 0{,}014468 = 1{,}019431.$

3) $k_1^{(2)} = h \cdot f(x_2, y_2) = 0{,}1 \dfrac{0{,}2 \cdot 1{,}019431}{0{,}2^2 + 1{,}019431^2} = 0{,}018892;$

$$k_2^{(2)} = h \cdot f\left(x_2 + h/2, y_2 + k_1^{(2)}/2\right) = 0{,}1 \frac{(0{,}2 + 0{,}1/2)\cdot(1{,}019431 + 0{,}018892/2)}{(0{,}2 + 0{,}1/2)^2 \cdot (1{,}018892 + 0{,}018892/2)^2} = 0{,}022944;$$

$$k_3^{(2)} = h \cdot f\left(x_2 + h/2, y_2 + k_2^{(2)}/2\right) = 0{,}1 \frac{(0{,}2 + 0{,}1/2)\cdot(1{,}019431 + 0{,}022944/2)}{(0{,}2 + 0{,}1/2)^2 \cdot (1{,}019431 + 0{,}022944/2)^2} = 0{,}022904;$$

$$k_4^{(2)} = h \cdot f\left(x_2 + h, y_2 + k_3^{(2)}\right) = 0{,}1 \frac{(0{,}2 + 0{,}1)\cdot(1{,}019431 + 0{,}022944)}{(0{,}2 + 0{,}1)^2 \cdot (1{,}019431 + 0{,}022944)^2} = 0{,}02658;$$

$$\Delta y_2 = \left(k_1^{(2)} + 2k_2^{(2)} + 2k_3^{(2)} + k_4^{(2)}\right)/6 =$$
$$= (0{,}018892 + 2 \cdot 0{,}022944 + 2 \cdot 0{,}022904 + 0{,}02658)/6 = 0{,}022861;$$

Тоді
$y_3 = y_2 + \Delta y_2 = 1{,}019431 + 0{,}022861 = 1{,}042292.$

Аналогічно заходимо значення розв'язку в точках $x_i = 0{,}4; 0{,}5; 0{,}6; 0{,}7; 0{,}8; 0{,}9; 1.$ Результати подано в таблиці.

x_i	$y(x_i)$
0	1
0,1	1,005
0,2	1,019
0,3	1,042
0,4	1,072
0,5	1,107
0,6	1,147
0,7	1,189
0,8	1,233
0,9	1,280
1	1,328

3. Реалізація методу засобами MS Excel.

1. Запускаємо програму MS Excel, переходимо на вільний робочий лист. Створюємо і заповнюємо заголовки таблиці, в якій будемо виконувати обчислення

	A	B	C	D	E
1	**Метод Рунге-Кутта**				
2	Початкові умови		**x0**	**y(x0)**	
3	Крок **h =**	0,1	0	1	

2. Заповнюємо комірки з початковими умовами та формулами для обчислень. У комірку C3 вводимо початкове значення $x_0 – 0$, в D3 – значення розв'язку в точці x_0 – 1, в комірку B3 – крок методу – 0,1.

Формули для обчислень

	A	B	C	D	E
1	**Метод Рунге-Кутта**				
2	Початкові умови		**x0**	**y(x0)**	
3	Крок **h =**	0,1	0	1	
4	**i**	**x**	**y**	**ks(i)**	**Δy**
5	0	=C3	=D3	=$B$3*(B5*C5/(B5^2+C5^2))	
6				=$B$3*((B5+$B$3/2)*(C5+D5/2)/((B5+$B$3/2)^2+(C5+D5/2)^2))	
7				=$B$3*((B5+$B$3/2)*(C5+D6/2)/((B5+$B$3/2)^2+(C5+D6/2)^2))	
8				=$B$3*((B5+$B$3)*(C5+D7)/((B5+$B$3)^2+(C5+D7)^2))	
9					=(D5+2*D6+2*D7+D8)/6
10	1	=B5+$B$3	=C5+E9	=$B$3*(B10*C10/(B10^2+C10^2))	
11				=$B$3*((B10+$B$3/2)*(C10+D10/2)/((B10+$B$3/2)^2+(C10+D1	
12				=$B$3*((B10+$B$3/2)*(C10+D11/2)/((B10+$B$3/2)^2+(C10+D1	
13				=$B$3*((B10+$B$3)*(C10+D12)/((B10+$B$3)^2+(C10+D12)^2))	
14					=(D10+2*D11+2*D12+D13)/6
15	2	=B10+$B$3	=C10+E14	=$B$3*(B15*C15/(B15^2+C15^2))	
16				=$B$3*((B15+$B$3/2)*(C15+D15/2)/((B15+$B$3/2)^2+(C15+D1	
17				=$B$3*((B15+$B$3/2)*(C15+D16/2)/((B15+$B$3/2)^2+(C15+D1	
18				=$B$3*((B15+$B$3)*(C15+D17)/((B15+$B$3)^2+(C15+D17)^2))	
19					=(1/6)*(D15+2*D16+2*D17+D18)

Рис. 4.3

3. Заповнюємо комірки з формулами для обчислень (див. рис. 4.3). В комірки D5:D8 вводимо формули для обчислення коефіцієнтів $k_1^{(i)}$, $k_2^{(i)}$, $k_3^{(i)}$, $k_4^{(i)}$, в комірку E9 – приросту функції, у комірку B10 – приросту аргументу, у C10 – шукане значення розв'язку у заданій точці. Для заповнення комірок D10:D13 достатньо скопіювати формули з діапазону D5:D8, у комірку E14 копіюємо формулу E9, у B15 – формулу B10, а в C15 – C10. Цей процес продовжуємо доти, поки не досягнемо кінця проміжку $x = 1$ і значення розв'язку в цій точці.

4. Результати обчислень подаємо з вказаною точністю $\varepsilon = 0{,}001$(див. рис 4.4)

Результати обчислень

	A	B	C	D	E
4	**i**	**x**	**y**	**$k_s^{(i)}$**	**Δy**
5	0	0	1	0	
6				0,00499	
7				0,00498	
8				0,00985	
9					0,00496
10	1	0,1	1,005	0,00985	
11				0,01453	
12				0,0145	
13				0,01889	
14					0,01447
15	2	0,2	1,019	0,01889	
16				0,02294	
17				0,0229	
18				0,02658	
19					0,02286
20	3	0,3	1,042	0,02658	
21				0,02987	
22				0,02984	
23				0,03275	
24					0,02979
25	4	0,4	1,072	0,03275	
26				0,03531	
27				0,03528	
28				0,03751	
29					0,03524
30	5	0,5	1,107	0,03751	
31				0,03943	
32				0,03941	
33				0,04108	
34					0,03938
35	6	0,6	1,147	0,04108	
36				0,04251	
37				0,04249	
38				0,04372	
39					0,04246
40	7	0,7	1,189	0,04372	
41				0,04476	
42				0,04475	
43				0,04565	
44					0,04473
45	8	0,8	1,234	0,04565	
46				0,04641	
47				0,0464	
48				0,04705	
49					0,04639
50	9	0,9	1,280	0,04705	
51				0,04759	
52				0,04759	
53				0,04805	
54					0,04758
55	10	1	1,328		

4. Варіанти завдань.

№ варіанта	Задача Коші	№ варіанта	Задача Коші
1.	$y' = 3x + 2y, y(0) = -2$	7.	$y' = 5x + y, y(0) = 5$
2.	$y' = 6x - y, y(0) = -1$	8.	$y' = 2x + 3y, y(0) = 4$
3.	$y' = x + y, y(0) = 0$	9.	$y' = 2x + 3y, y(0) = 3$
4.	$y' = 7x + y, y(0) = 3$	10.	$y' = 4x - y, y(0) = 2$
5.	$y' = 3x - 4y, y(0) = 2$	11.	$y' = 3x - 2y, y(0) = 1$
6.	$y' = 2x + 5y, y(0) = -3$	12.	$y' = 5x - 3y, y(0) = 2$

5. Хід роботи

1. Побудуйте таблицю значень функції $y = f(x)$, при $x \in [0; 1]$, яка є розв'язком заданого диференціального рівняння, що задовольняє задану початкову умову (задачі Коші) відповідно до варіанта
а) вручну, з використанням калькулятора, розбивши проміжок інтегрування на 10 частин;
б) Створивши для розрахунків електронну таблицю.
2. Розв'яжіть вказане лінійне диференціальне рівняння аналітично та виокремте з сімейства його розв'язків той, що відповідає заданій початковій умові.
3. Реалізуйте на **Python** програму, яка:

запитуватиме в користувача довжину a відрізка $[0; a]$, на якому шукається розв'язок заданої задачі Коші;

знаходитиме наближено розв'язок цієї задачі методом Рунге-Кутта;

будуватиме для порівняння графіки наближеного та точного роз'язків для $x \in [0; a]$.