Лабораторна робота № 6. Чисельне диференціювання функцій.

1. Чисельне диференціювання за формулою Лагранжа.

формули Лагранжа. Вважаємо, що на відрізку $[a, b]$ функція $f(x)$ задана таблицею значень у рівновіддалених вузлах інтерполювання, тобто маємо $x_{i+1} - x_i = h$, $i = \overline{1, n-1}$. У цьому випадку загальний вигляд інтерполяційного многочлена Лагранжа можна спростити. Введемо нову змінну t за формулою $t = \dfrac{x - x_0}{h}$. Тоді $x - x_i = x - x_0 - ih = h(t - i)$, $i = \overline{1, n}$ і $x_i - x_j = x_i - x_0 - jh = h(i - j)$, $i, j = \overline{1, n}$, $i \neq j$.

Після підстановки многочлен набере вигляду

$$L_n(x) = L_n(x_0 + th) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \frac{t(t-1)\dots(t-n)}{t-i} y_i \qquad (4)$$

Остання рівність є інтерполяційною формулою Лагранжа для рівновіддалених вузлів.

Далі вважаємо, що $f'(x) \approx L_n'(x)$. Продиференціюємо рівність (4) по x, не забуваючи, що після заміни в многочлені Лагранжа x є функцією від t. Оскільки $x = x_0 + th$, то $\dfrac{dx}{dt} = h$. Тому після диференціювання (див., наприклад, [3]) отримаємо

$$f'(x) \approx \frac{1}{h} \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \frac{d}{dt} \left[\frac{t(t-1)\dots(t-n)}{t-i} \right] \cdot y_i \qquad (5)$$

Остання наближена рівність є формулою чисельного диференціювання на основі інтерполяційної формули Лагранжа у випадку рівновіддалених вузлів.

Розглянемо частковий випадок формули (5). Нехай функція задана трьома табличними значеннями ($n = 2$). Тоді

$$f'(x) \approx L_n'(x) = \frac{1}{h} \left[\frac{1}{2}(2t-3)y_0 - (2t-2)y_1 + \frac{1}{2}(2t-1)y_2 \right]. \qquad (6)$$

Зокрема, якщо похідні знаходимо у вузлах інтерполювання, то отримаємо наступні вирази:

$$f'(x_0) = y_0' \approx \frac{1}{2h}(-3y_0 + 4y_1 - y_2)\,, \qquad f'(x_1) = y_1' \approx \frac{1}{2h}(-y_0 + y_2)\,,$$
$$f'(x_2) = y_2' \approx \frac{1}{2h}(y_0 - 4y_1 + 3y_2)\,. \tag{7}$$

Приклад. Знайти наближене значення похідної функції в точці $x = 4$. Функція задана таблично $x_0 = 2$, $y_0 = 4$, $x_1 = 3$, $y_1 = -2$, $x_2 = 4$, $y_2 = 6$.

В нашому випадку $h = 1$. Скористаємося формулою (6)

$$f'(x) \approx \frac{4}{2}(2t-3) + 2(2t-2) + \frac{6}{2}(2t-1) = 14t - 13.$$

Далі, $t = \dfrac{x - x_0}{h} = \dfrac{4-2}{1} = 2$, тому $f'(4) \approx 14 \cdot 2 - 13 = 15$.

2. Чисельне диференціювання за формулою Ньютона.

Чисельне диференціювання на основі інтерполяційних формул Ньютона. Запишемо для функції $f(x)$, що задана своїми значеннями в рівновіддалених вузлах, перший інтерполяційний многочлен Ньютона

$$f(x) \approx y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \cdots + \frac{t(t-1)\ldots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0,$$

де $t = \dfrac{x - x_0}{h}$, $h = x_{i+1} - x_i$.

Перепишемо цей поліном, відкривши дужки в чисельнику кожного доданку

$$f(x) \approx y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t^2 - t}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{t^3 - 3t^2 + 2t}{6}\Delta^3 y_0 + \\ \frac{t^4 - 6t^3 + 11t^2 - 6t}{24}\Delta^4 y_0 + \ldots$$

Зауважимо, що $\dfrac{df(x)}{dx} = \dfrac{df(x)}{dt} \cdot \dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{h} \cdot \dfrac{df(x)}{dt}$. Продиференціюємо останню рівність по x двічі

$$f'(x) \approx \frac{1}{h} \left(\Delta y_0 + \frac{2t-1}{2} \Delta^2 y_0 + \frac{3t^2 - 6t + 2}{6} \Delta^3 y_0 + \right.$$
$$\left. \frac{2t^3 - 9t^2 + 11t - 3}{12} \Delta^4 y_0 + \dots \right)$$

і

$$f''(x) \approx \frac{1}{h^2} \left(\Delta^2 y_0 + (t-1) \Delta^3 y_0 + \frac{6t^2 - 18t + 11}{12} \Delta^4 y_0 + \dots \right).$$

Аналогічно можна обчислити похідні вищих порядків.

Для того, щоб отримати значення похідних в точці, що лежить в кінці таблиці, треба скористатися другою інтерполяційною формулою Ньютона. Застосовуючи той же прийом, що і для випадку першої інтерполяційної формули, отримаємо

$$f'(x) \approx \frac{1}{h} \left(\Delta y_{n-1} + \frac{2t+1}{2} \Delta^2 y_{n-2} + \frac{3t^2 + 6t + 2}{6} \Delta^3 y_{n-3} + \right.$$
$$\left. \frac{2t^3 + 9t^2 + 11t + 3}{12} \Delta^4 y_{n-4} + \dots \right)$$

і

$$f''(x) \approx \frac{1}{h^2} \left(\Delta^2 y_{n-2} + (t+1) \Delta^3 y_{n-3} + \frac{6t^2 + 18t + 11}{12} \Delta^4 y_{n-4} + \dots \right).$$

Формули чисельного диференціювання значно спрощуються, якщо значення похідних обчислюється у вузлах інтерполювання. Наприклад, в точці $x = x_0$ (для неї $t = 0$) отримаємо

$$f'(x) = y_0' \approx \frac{1}{h} \left(\Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2} + \frac{\Delta^3 y_0}{3} - \frac{\Delta^4 y_0}{4} + \dots \right) \tag{8}$$

і

$$f''(x) = y_0'' \approx \frac{1}{h^2} \left(\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12} \Delta^4 y_0 - \dots \right). \tag{9}$$

3. Варіани завдань.

x_i - вузли інтерполяції, y_i - значення функції в вузлах інтерполяції, x - значення аргументу, для якого слід визначити значення заданої таблцею невідомої ф-ції.

№	Індивідуальне завдання						x
1.	x_i	-2	-1	0	1	2	0,5
	y_i	0,37	1,00	2,72	7,39	20,09	
2.	x_i	-4	-2	0	2	4	-3,5
	y_i	3,26	1,59	2,50	3,41	1,74	
3.	x_i	-1	0	1	2	3	-1,2
	y_i	7,5	-5,5	-16,5	-25,5	-32,5	
4.	x_i	-5	-3	-1	1	3	-2
	y_i	25,96	8,86	0,16	1,84	9,14	
5.	x_i	1	4	7	10	13	9
	y_i	1,37	5,40	8,95	12,30	15,56	
6.	x_i	-5	-3	-1	1	3	0,5
	y_i	173,41	29,09	3,72	1,37	25,01	
7.	x_i	-2	-1	0	1	2	1,4
	y_i	-1,51	0,38	1,00	0,70	0,67	
8.	x_i	-5	0	5	10	15	6
	y_i	33,16	35,00	33,16	34,41	34,15	
9.	x_i	-2	-1	0	1	2	0,6
	y_i	-21	6	7	0	3	
10.	x_i	-3	-1	1	3	5	-2
	y_i	48	6	0	34	252	
11.	x_i	-2	-1	0	1	2	0,7
	y_i	13,39	4,72	1,00	0,37	2,14	
12.	x_i	-4	-2	0	2	4	1,3
	y_i	67,27	18,08	-5,00	18,08	67,27	
13.	x_i	3	4	5	6	7	3,6

	y_i	-42,14	67,27	98,58	139,20	192,23	
14.	x_i	3	5	7	9	11	6
	y_i	10,84	11,04	9,91	10,42	11	
15.	x_i	-5	-3	-1	1	3	2
	y_i	153,41	32,09	4,72	0,37	6,05	

4 Хід роботи

1) Обчисліть значення похідної від функції заданої таблично в заданій точці вручну, з використанням калькулятора на основі інтерполяційної формули Лагранжа.
2) Обчисліть значення другої похідної від функції заданої таблично в заданій точці вручну, з використанням калькулятора на основі інтерполяційної формули Ньютона.

3) Реалізуте програму на **Python** для обчислення перших двох похідних заданої функції у вказаній точці, аналогічно до обчислень з пунктів 1) та 2).