Лабораторна робота № 13. Розв'язування систем лінійних алгебричних рівнянь методом простої ітерації.

1. Метод простої ітерації.

Нехай задано систему рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Подамо цю систему у вигляді еквівалентної їй системи

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1n}x_n + \beta_1, \\ x_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \cdots + \alpha_{2n}x_n + \beta_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \cdots + \alpha_{nn}x_n + \beta_n, \end{cases} \tag{1}$$

або у вигляді матричного рівняння $\bar{x} = \alpha\bar{x} + \bar{\beta}$.

Суть цього наближеного методу полягає в тому, що, починаючи з деякого початкового наближення, на кожному кроці обчислювального процесу це наближення розв'язку поліпшують, дістаючи при цьому нове (точніше) наближення. Цей процес продовжують доти, поки розв'язок не буде знайдено з потрібною точністю.

Останню систему рівнянь будемо розв'язувати методом послідовних наближень. За початкове наближення розв'язку візьмемо деякий вектор $\bar{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ де x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0 – довільні числа. Тоді послідовно знаходимо перше наближення $\bar{x}^1 = \alpha\bar{x}^0 + \bar{\beta}$, друге наближення $\bar{x}^2 = \alpha\bar{x}^1 + \bar{\beta}$ і т.д. Взагалі, якщо вже побудовано k-те наближення, то наступне будуємо за формулою $\bar{x}^{k+1} = \alpha\bar{x}^k + \bar{\beta}$, або в розгорнутому вигляді

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \alpha_{11}x_1^k + \alpha_{12}x_2^k + \cdots + \alpha_{1n}x_n^k + \beta_1, \\ x_2^{k+1} = \alpha_{21}x_1^k + \alpha_{22}x_2^k + \cdots + \alpha_{2n}x_n^k + \beta_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n^{k+1} = \alpha_{n1}x_1^k + \alpha_{n2}x_2^k + \cdots + \alpha_{nn}x_n^k + \beta_n. \end{cases} \tag{2}$$

Якщо кожна з числових послідовностей $\{x_i^k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $i = \overline{1,n}$ має границю x_i^*, тобто $x_i^* = \lim\limits_{k\to\infty} x_i^k$, $(i = \overline{1,n})$, то сукупність значень $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ є розв'язком системи (1).

2. Умови збіжності методу.

Таким чином, формула (2) визначає метод простої ітерації. Його алгоритм простий і зручний для обчислень на ЕОМ. Достатні умови збіжності методу простої ітерації сформульовано в наступній теоремі.

Теорема 1. *Якщо матриця системи (1) задовольняє хоч одну з умов*

- *сума абсолютних значень коефіцієнтів кожного рядка матриці менша за одиницю, тобто* $l_0 = \max\limits_{1\le i\le n} \sum\limits_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1$ *;*
- *сума абсолютних значень коефіцієнтів кожного стовпчика матриці менша за одиницю, тобто* $l_1 = \max\limits_{1\le j\le n} \sum\limits_{i=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1$ *;*
- *сума квадратів всіх коефіцієнтів матриці менша за одиницю, тобто* $l^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{ij}^2 < 1$ *,*

то система рівнянь (1) має єдиний розв'язок. Цей розв'язок є границею послідовності $\{\bar{x}^k\}_{k\in\mathbb{N}}$*, побудованої за методом простої ітерації (2), виходячи з будь-якого початкового наближення* $\bar{x}^0$*.*

3. Практична реалізація.

На практиці часто за початкове наближення беруть стовпчик вільних членів. Алгоритм розв'язування системи (1) методом ітерацій можна записати наступним чином:

1. Обчислення величини $l_0 = \max\limits_{1\le i\le n} \sum\limits_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}|$.
2. Перевірка умови $l_0 < 1$. Якщо ця умова не виконується, то метод застосовувати не варто, в протилежному випадку переходимо до пункту 3.
3. Обчислення допустимої похибки $\varepsilon_1 = \dfrac{1-l_0}{l_0}\varepsilon$, де ε – точність, з якою потрібно знайти розв'язок.
4. Вибір початкового наближення $\bar{x}^0$.
5. Обчислення наступного наближення $\bar{x}^{k+1}$ через знайдене на попередньому кроці значення $\bar{x}^k$.
6. Перевірка умови $\max\limits_{1\le i\le n} |x_i^{k+1} - x_i^k| < \varepsilon_1$. Якщо ця умова виконується, то процес ітерацій завершується і вектор $\bar{x}^{k+1}$ вважають наближеним значенням розв'язку. В іншому випадку переходять до пункту 5.

4. Варіанти завдань.

1.
$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 12; \\ 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 19; \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 21; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 13. \end{cases}$$

7
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8; \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 2; \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 5; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 6. \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 5; \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 2; \\ 5x_1 - 7x_2 + 10x_4 = 8; \\ 3x_2 - 5x_3 = -2. \end{cases}$$

8
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 22; \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 = 26; \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 22; \\ 7x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 26. \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 11; \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 = 6; \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_4 = -2; \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 6. \end{cases}$$

9
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 10; \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 8; \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 10. \end{cases}$$

4.
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0; \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = -7; \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = 08; \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 21. \end{cases}$$

1
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 0; \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + 6x_4 = 11; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 6; \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 10. \end{cases}$$

5.
$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_4 = 4; \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -1; \\ 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 112; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = -2. \end{cases}$$

1
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -2; \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 0; \\ x_1 - x_2 - x_4 = -1; \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -3. \end{cases}$$

6.
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 6; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 23; \\ x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 4. \end{cases}$$

1
$$\begin{cases} 2x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 6; \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 13; \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 = 11; \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 9. \end{cases}$$

5. Хід роботи

1. Перетворіть задану у варіанті завдання систему лінійних алгебричних рівнянь до вигляду (1), необхідного **для побудови послідовних наближень** методом ітерацій так, щоб виконувалася хоча б одна умова **теореми 1**.

2. Побудуйте ітераційний процес та знайдіть перші два наближення до розв'язку системи **вручну**, з використанням калькулятора. Результати обчислень додайте до звіту

3. Перенесіть виконання очислень в **електрону таблицею** в MS Excel, або в OOo Calc. Побудуйте за допомогою **ЕТ перші 5 наближень** до розв'язку.

4. Реалізуйте на **Python** програму, яка розв'язує задану у варіанті завдання систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом методом простих ітерацій з заданою точністю.